Jour. Ind. Soc. Ag. Statistics
Vol. XXXIX, No. 1 (1987), pp. 9-12

एक अप्राप्य उपचार वाली लातिन वर्ग अभिकल्पना का विश्लेषण

सुखपाल सिंह एवं महेन्द्र प्रताप
जनता वैदिक कालिज, बड़ौत (मेरठ)

(Received : January, 1982)

सारांश

अप्राप्त अवलोकनों के, न्यूनतम वर्ग प्राक्कलन प्रदान करने वाले समीकरण कुलक पर उपयुक्त रेखीय प्रतिबंध आरोपित कर, नान–आइट्रेटिव विधि से प्राक्कलन प्राप्त किये गये हैं ।

बोध शब्द : आश्रित समीकरण कुलक, अत्युत्क्रमणीय प्रतिरूपी अप्राप्यता पूरित अभिकल्पना, अद्वितीय प्राक्कलन, लांविक ।

१. यदि $v \times v$ लातिन वर्ग अभिकल्पना अनुसार किये गये प्रयोग में किसी (माना कि प्रथम) उपचार (Treatment) से सम्बन्धित एक भी अवलोकन (Observation) प्राप्त न हो तो ऐसी परिस्थिति में प्राप्त अवलोकनों का प्रत्यक्ष विश्लेषण कुछ जटिल हो जाता है । इस जटिलता को दूर करने का एक उपाय यह है कि अप्राप्त अवलोकनों के न्यूनतम वर्ग विधि से प्राप्त प्राक्कलन खाली स्थानों पर रखकर लातिन वर्ग को पूरा कर लिया जाये और फिर लातिन वर्ग अभिकल्पना अनुसार विश्लेषण किया जाये । न्यूनतम वर्ग प्राक्कलन प्रदान करने वाला समीकरण कुलक निम्न होगा ।

$$v(v-2)\,\hat{y}_m - (v-2)\sum_{1}^{v}\hat{y}_m = v\,[R_{(m)} + C_{(m)}] - 2G \qquad (1)$$

$$(m = 1, 2, \ldots v)$$

जहां $y_1, y_2, \ldots y_v$ अप्राप्त उपचार से सम्बन्धित अवलोकन हैं ।

G = समस्त $v(v-1)$ प्राप्त अवलोकनों का योग है ।

$R_{(m)}$ = उस पंक्ति (Row) के प्राप्त अवलोकनों का योग हैं जिससे mवां अप्राप्त अवलोकन सम्बन्धित है। तथा

C_m = उस स्तम्भ (Column) के प्राप्त अवलोकनों का योग है जिससे mवां अप्राप्त अवलोकन सम्बन्धित है।

समीकरण कुलक (१) स्वतंत्र नहीं अपितु आश्रित है। यदि अप्राप्त अवलोकनों के प्राक्कलन प्रदान करने वाला समीकरण कुलक आश्रित है तो इस प्रकार की अप्राप्यता को अत्युत्क्रमणीय प्रतिरूपी अप्राप्यता कहते हैं। इस प्रकार की अप्राप्यता के प्राक्कलन अभी तक येट्स [५], हैले एवं वैस्मा कोट [१] तथा परीस [२] द्वारा प्रतिपादित पुनरावृत्ति विधियों (Iterative methods) द्वारा प्राप्त किये गये हैं। पुनरावृत्ति विधि में आगणन (Computation) की अधिकता है तथा इससे यह भी पता नहीं चलता कि अप्राप्यता का प्रतिरूप अत्युत्क्रमणीय है अथवा नहीं। इन कारणों से सर्लें [४] तथा रूबिन [३] ने अत्युत्क्रमणीय प्रतिरूपी अप्राप्यता के प्राक्कलन हेतु भी नान–आइट्रेटिव विधि खोजने की आवश्यकता पर बल दिया है। प्रस्तुत शोध में हमने समीकरण कुलक (१) को सन्तुष्ट करने वाले मान को नान–आइट्रेटिव विधि से प्राप्त करने का प्रयत्न किया है।

२. वास्तव में समीकरण कुलक (१) से अप्राप्त अवलोकनों (y_m's) के प्राक्कलन अद्वितीय नहीं हैं किन्तु इनके अपने माध्य से विचलनों के प्राक्कलन अद्वितीय हैं। अर्थात $\left(y_m - \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu} y_m\right)$ का प्राक्कलन अविचल (Invariant) है। नीचे हमने यह सिद्ध किया है कि त्रुटि–वर्ग योग (Error sum of squares) $\sum_{1}^{\nu}\left(\hat{y}_m - \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu}\hat{y}_m\right)^2$ पर निर्भर करता है।

उपपत्ति : सामान्य प्रतीकों की भाषा में पूरित लातिन वर्ग–अभिकल्पना में त्रुटि–वर्ग योग निम्न होगा—

$$
\begin{aligned}
\text{E.S.S} = & \sum_{\text{प्राप्त अव॰}} y_a^2 + \sum_{1}^{\nu} \hat{y}_m^2 - \frac{1}{\nu}\left[\sum_{2}^{\nu} T_i^2 + \left(\sum_{1}^{\nu} \hat{y}_m^2\right)\right] \\
& - \left[\frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu}\left\{R_{(m)} + \hat{y}_m\right\}^2 - \frac{1}{\nu^2}\left\{G + \sum_{1}^{\nu}\hat{y}_m\right\}^2\right] \\
& - \left[\frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu}\left\{C_{(m)} + \hat{y}_m\right\}^2 - \frac{1}{\nu^2}\left\{G + \sum_{1}^{\nu}\hat{y}_m\right\}^2\right] \\
= & \sum_{\text{प्राप्त अव॰}} y_a^2 - \frac{1}{\nu}\sum_{2}^{\nu} T_i^2 - \left[\sum_{1}^{\nu} R_{(m)}^2 - \frac{G^2}{\nu^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$-\left[\frac{1}{v}\sum_{1}^{v} C^2_{(m)}-\frac{G^2}{v^2}\right]+\left[\sum_{1}^{v}\hat{y}^2_m-\frac{1}{v}(\Sigma\,\hat{y}_m)^2\right]$$

$$-\frac{2}{v}\left[\sum\hat{y}^2_m-\frac{1}{v}\left(\sum_{1}^{v}\hat{y}_m\right)^2\right]\frac{2}{v}\sum_{1}^{v}\left[R_{(m)}+C_{(m)}-\frac{2G}{v}\right]\hat{y}_m$$

अब समीकरण (१) से $\left[R_{(m)}+C_{(m)}-\frac{2G}{v}\right]$

$$=(v-2)\left[\hat{y}_m-\frac{1}{v}\sum_{1}^{v}\hat{y}_m\right]$$

रख कर सरल करने पर

$$\text{E.S.S}=\sum_{\text{प्राप्त अव०}} y^2_a-\frac{1}{v}\sum T^2_i-\left[\frac{1}{v}\sum R^2_{(m)}-\frac{G^2}{v^2}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{v}\sum_{1}^{v} C^2_{(m)}-\frac{G^2}{v^2}\right]-\frac{(v-2)}{v}\sum\left(\hat{y}_m-\frac{1}{v}\sum_{1}^{v}\hat{y}^2_m\right)$$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि त्रुटि वर्ग योग $\sum_{1}^{v}\left(\hat{y}_m-\frac{1}{v}\sum_{1}^{v}\hat{y}_m\right)^2$ पर निर्भर करता है जो अद्वितीय है । अतः त्रुटि–वर्ग योग समीकरण कुलक (१) के किसी भी मान के लिये अविचल हुआ ।

३. यदि रेखीय प्रतिबंध

$$\sum_{1}^{v}\hat{y}_m=\frac{G}{v-1}\tag{2}$$

के अन्तर्गत समीकरण कुलक (१) को हल किया जाये तो

$$\hat{y}_m=\frac{1}{(v-2)}\left[R_{(m)}+C_{(m)}\right]-\frac{G}{(v-1)(v-2)}\tag{3}$$

समीकरण कुलक (३) से अप्राप्त अवलोकनों के प्राक्कलन बहुत ही सरलता से प्राप्त हो जाते हैं तथा इनसे पूरित लातिन वर्ग–अभिकल्पना का उपचार–वर्ग योग (Treatment sum of squares) भी समायोजिता (Adjusted) आता है । उपरोक्त तथ्य को नीचे सिद्ध किया गया है ।

उपपत्ति : चूंकि प्राप्त उपचार, पंक्ति एवं स्तम्भ दोनों के लांबिक हैं । अतः

$$\text{Tr.S.S. (adj.)} = \frac{1}{v} \sum_{2}^{v} T_i^2 - \frac{G^2}{v(v-1)} \tag{4}$$

तथा प्रतिबंध (२) के अन्तर्गत

$$\text{Tr. S.S (avg.)} = \frac{1}{v}\left[\sum_{2}^{v} T_i^2 + \frac{G^2}{(v-1)^2}\right] - \frac{1}{v^2}\left[G + \frac{G}{(v-1)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{v} \sum_{2}^{v} T_i^2 - \frac{G^2}{v(v-1)} \tag{5}$$

(४) और (५) यह सिद्ध करते हैं कि प्रतिबंध (२) के अन्तर्गत प्राप्त अवलोकनों के प्राक्कलनों से पूरित लातिन वर्ग अभि कल्पना का उपचार—वर्ग योग समायोजित आता है । इस सरलता के कारण हम समीकरण कुलक (३) से प्राप्त प्राक्कलनों के उपयोग की संस्तुति करते हैं ।

४. यहां यह भी उल्लेखनीय है कि (१) v अवलोकन प्राक्कलित करने पर भी त्रुटि की स्वतंत्र संख्या में v की कमी न होकर $(v-1)$ की कमी होती है । क्योंकि $(v-1)$ अवलोकन ही स्वतंत्र रूप से प्राक्कलित किये गये हैं । अतः त्रुटि–स्वतंत्र संख्या $= (v-1)(v-2) - (v-1) = (v-1)(v-3)$ होगी और (२) लातिन वर्ग अभिकल्पना के अपूर्ण होते हुए भी प्राप्त उपचार–पंक्ति एवं स्तम्भ दोनों के लांबि है, अतः इनकी प्रत्येक पुनरावृत्ति (Replication) पूर्ण रुपेण प्रभावी है ।

आभार

लेखकगण आख्या कारों की महत्वपूर्ण सम्मतियों के लिये आभारी है ।

संदर्भ (REFERENCES)

[1] Healy, H. O. and Westma cott, M. (1956) : Missing values in experiments analyzed on automatic computers, *App. Statist.*, **5** : 203-206.

[2] Preece, D. A. (1971) : Iterative procedures for missing values in experiments, *Technometrics*, **13** : 743-754.

[3] Rubin, D. B. (1971) : A non-iterative algorithm for least squares estimation of missing values in any analysis of variance design, *App. Statist.*, **21** : 136-141.

[4] Searle, S. R. (1971) : *Linear Models*. New York : Wiley.

[5] Yates, F. (1933) : The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete, *Emp. J. Exp. Agric.*, **1** : 129-142.